

Linda NULLANS

**La mise en équation :
une activité non maîtrisée par les
élèves de seconde. Quelles
solutions apporter ?**

Mémoire I.U.F.M.

Tuteur : Mr SERAY

(Lycée H. Nominé de Sarreguemines)

PLC 2 – Mathématiques

Année scolaire 1998 – 99

SOMMAIRE

SOMMAIRE	2
INTRODUCTION	4
I / GÉNÉRALITÉS SUR LA MISE EN ÉQUATION(S).....	5
Le programme.....	5
Les différentes situations où intervient la mise en équation(s).....	6
Quels sont les outils mis à la disposition des enseignants face à la mise en équation(s) dans les manuels de seconde.....	7
Quelques statistiques de l'APMEP	8
II / PREMIÈRE EXPÉRIMENTATION ET REGARD SUR LA SÉANCE.....	8
Critères de choix des exercices	8
Mise en place de la séance.....	10
Analyse a priori de cette séance	11
Déroulement et analyse a posteriori de la séance	12
III / QUELLES SOLUTIONS APPORTER AUX PROBLÈMES DÉTECTÉS	18
Construction d'une séance d'enseignement	18
Déroulement de la séance d'enseignement.....	20
Analyse de la séance d'enseignement.....	22
Synthèse des deux expériences	24
CONCLUSION.....	26
Exercice 1	2
Exercice 2	2
Exercice 3	2
Exercice 4	2
Exercice 5	3
Exercice 6	3
BIBLIOGRAPHIE	4
Conclusion	34

INTRODUCTION

La mise en équation(s) des données d'un problème est une activité qui se révèle difficile pour les élèves de seconde. En effet, lors d'une séance de module comportant des équations à résoudre et des problèmes à mettre en équation, il s'est avéré que les algorithmes de résolution d'une équation à une inconnue du 1^{er} degré étaient bien maîtrisés, mais que le passage du texte de l'énoncé à l'écriture des équations était souvent impossible à trouver ou à effectuer correctement. Une expérience identique sur un devoir à la maison où l'élève était censé avoir plus de temps de réflexion, m'a mené à une conclusion identique : la mise en équation(s) reste une activité difficile pour une majorité d'élèves. Ainsi seulement 12 élèves sur 22 dans une classe de 3^{ème} réussissent la mise en équation(s) dans le problème suivant :

Une fermière vend 7 poulets et 11 canards pour 824 F. Chaque canard vaut 16 F de plus qu'un poulet. Pour trouver le prix d'un canard, Jean désigne par c le prix d'un canard, il écrit une équation et il la résout. Fais le travail de Jean (écris une équation et résous-la pour trouver le prix d'un canard.)

IREM de Clermont-Ferrand

Cet exemple ainsi que les pourcentages de réussite sur des problèmes aboutissant à des équations, relevés par une étude de l'APMEP (voir annexe 8) montre bien que peu d'élèves de la classe de seconde peuvent mener à bien une résolution de problème, alors qu'il s'agit d'un des objectifs du programme de 2nd.

La résolution de problème est une activité présente tout au long du cursus mathématique du collège jusqu'au lycée. Dès la cinquième, les textes officiels parlent de “ *Mettre en équation un problème dont la résolution conduit à une équation à coefficients numériques ...* ” et en terminale, le programme demande de “ *dégager sur des exemples les différentes phases du traitement d'un problème : mise en équation(s), résolution, contrôle et exploitation des résultats* ”.

Malheureusement les programmes de 4^{ème} et de 3^{ème}, très clairs en ce qui concerne les algorithmes de résolution, se contentent, pour la mise en équation(s), de suggérer, de donner “ des exemples variés de problèmes se ramenant au 1^{er} degré ”. Les manuels, quant à eux, conformément au programme, soulignent la nécessité de mettre en évidence, les différentes étapes du traitement d'un problème : mise en équation(s), résolution de l'équation, interprétation des résultats. Cependant, ils restent tout autant évasifs que les programmes sur le choix de l'inconnue et le problème du passage du texte à l'écriture de l'équation. Une étape tel que “ la mise en équation(s) ” demande pourtant un intérêt particulier et impose la nécessité d'un enseignement spécifique.

C'est pourquoi dans le cadre de mon enseignement en classe de seconde, j'ai construit une première séance d'expérimentation traitant des exercices choisis dans des domaines différents afin de faire apparaître des erreurs aussi spécifiques que diverses. Les élèves seront amenés à résoudre ces exercices avec leur connaissance acquise en troisième sur la mise en équation, ce qui se résume aux étapes données par les manuels. Cette expérience sera une phase de test et d'observation des élèves. Elle est détaillée dans la deuxième partie de ce mémoire et va permettre de faire apparaître les difficultés des élèves face à la mise en équation(s) : l'identification des objets

que contient le texte de l'énoncé et l'identification des relations que le texte de l'énoncé établit entre les objets auxquels il réfère.

Après une analyse de cette première expérience, j'exposerai dans une troisième partie, la réalisation d' une deuxième expérience qui essayera de répondre à la question suivante : “ quelles solutions peut-on apporter aux élèves pour apprendre et comprendre la mise en équation(s) ? ”. Cette deuxième séance privilégiera un apprentissage de deux choses essentielles . La première est l'identification des objets et quantités inconnues auxquels réfère le texte de l'énoncé en visant à la prise de conscience des différents défauts de représentation et de la différence entre les quantités inconnues et les inconnues de base. La deuxième est l'identification des relations d'égalité entre les différentes données du texte et dans laquelle l'apprentissage est davantage conçu comme un apprentissage de compréhension de texte. Enfin, les apports de cette expérience seront examinés dans une synthèse sur les progrès fait par les élèves par rapport à la première expérience.

I / GÉNÉRALITÉS SUR LA MISE EN ÉQUATION(S)

Le programme

●) Collège :

La mise en équation(s) doit être préparée dès la classe de sixième :

Equation du type $23 \times \text{€} = 471,5$ ou $2,05 : \text{€} = 8,2$

A ce niveau, il est recommandé de ne pas désigner par une lettre le nombre manquant. Cependant, à propos de l'initiation au calcul littéral, les textes officiels précisent :

“ Il s'agit, dans des situations concrètes, de schématiser un calcul (périmètre, aire, ...) en utilisant des lettres qui, à chaque usage, seront remplacées par des valeurs numériques. ”

En cinquième, les équations numériques du type “ $a + x = b$ ” et “ $ax = b$, ($a \neq 0$) ” sont explicitement au programme. Les compléments de programme précisent :

“ Il convient de ne pas multiplier les exercices de résolution d'équations numériques données a priori ”.

Mais l'élève doit savoir :

“ mettre en équation un problème dont la résolution conduit à une équation à coefficients numériques de l'un des types précédents ”.

L'objectif poursuivi est donc essentiellement la mise en équation(s) plus que l'acquisition des techniques de résolution des équations.

En classe de 4^{ème}, le programme parle de :

“ la résolution de problèmes aboutissant à des équations, à des inéquations du 1^{er} degré à une inconnue ”.

Il est précisé que :

“ on dégagera, sur des exemples étudiés, les différentes étapes du travail : mise en équation(s), résolution et interprétation des résultats. ”

Ce n'est qu'en classe de 3^{ème} que les équations du 1^{er} degré et les systèmes de 2 équations du

1^{er} degré à 2 inconnues à coefficients numériques sont explicitement au programme. Il s'agit donc bien, en fin de collège de savoir résoudre les équations. Il est précisé, du reste, dans les compléments que “ l'entraînement au calcul littéral se poursuit et doit aboutir à une relative autonomie ” alors qu'en classe de 4^{ème} le calcul littéral devait être “ introduit avec prudence ”. Néanmoins en 4^{ème} comme en 3^{ème} les compléments du programme précisent que :

“ la résolution de problèmes issus de la géométrie, de la gestion des données, des autres disciplines, de la vie courante... ”.

Ceci constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme.

•) Lycée

La classe de seconde est en quelque sorte une classe de liaison entre le collège et le lycée. Pour une bonne articulation entre le collège et la seconde, les programmes visent à consolider les connaissances des élèves sur la résolution de problèmes et amener l'élève à utiliser la mise en équation(s) dans des domaines différents. En effet les programmes précisent que : “ *Les activités de résolutions de problèmes fourniront un champ de fonctionnement pour les capacités acquises au collège et, en cas de besoin, de consolider ces acquis* ”. Il est donc important de tester les connaissances des élèves face à ces activités et de leur apporter un maximum d'approfondissement sur le sujet.

De plus, à travers les trois années de lycée, aussi bien en seconde qu'en première ou qu'en terminale, le programme, en ce qui concerne la mise en équation(s), est clair et reste un objectif important. Deux mêmes phrases reviennent sans cesse : “ *La résolution de problèmes, issus de la géométrie, de l'étude des fonctions, de la gestion des données, des autres disciplines et de la vie courante, constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme. On dégagera sur des exemples étudiés les différentes phases du traitement d'un problème : mise en équation(s), résolution, contrôle et exploitation des résultats* ”. Dans cette perspective, il convient de répartir les activités de mise en équation(s) tout au long de l'année et dans des domaines différents.

Les différentes situations où intervient la mise en équation(s)

Dès la quatrième, les situations où intervient la mise en équation(s) sont très diverses, et en seconde, l'apparition des fonctions apporte un nouvel outil à la mise en équation(s). On pourrait répertorier les différents domaines d'application de la manière suivante :

- Géométrie (calcul de longueurs, de périmètres, d'aires, de volumes, ...)
- Vie économique et sociale (production d'entreprise, population, bénéfice, vente, achat, pourcentage ...)
- Problème de la “ vie courante ” (comparaison d'âge, de poids, de billes, ...)
- Physique (problèmes de vitesse)

- Electricité (calculs de puissance électrique, de tension, ...)
- Arithmétique
- Dénombrements
- Statistiques

Comme nous pourrions le constater ultérieurement dans les deux expériences, les problèmes de mise en équation(s) alimentent le travail de recherche individuel ou en équipe, il développe aussi les capacités de mise au point d'un raisonnement. Il incite également une démarche scientifique et rationnelle contrairement à la résolution d'équation qui sombre souvent dans la technique répétitive. C'est en cela que le travail de la mise en équation(s) est un travail marginal et difficile.

Quels sont les outils mis à la disposition des enseignants face à la mise en équation(s) dans les manuels de seconde

Le problème auquel l'enseignant se trouve confronté lorsqu'il donne des problèmes de mise en équation(s) est de savoir comment apprendre aux élèves à écrire l'équation à l'aide de l'énoncé ou tout au moins, à ne pas rester complètement désorienté devant l'énoncé. La mise en équation(s) est un travail marginal et difficile, et c'est sans doute pour cette raison que peu de manuels ne donnent de méthode de la mise en équation(s) proprement dite. Pour répondre à ce problème, quelques manuels de seconde proposent maintenant un " plan de travail " censé aider les élèves. Il comporte le plus souvent 4 étapes :

- Le choix de l'inconnue ou des inconnues
- La mise en équation(s)
- La résolution de l'équation ou des équations
- L'interprétation des résultats et la rédaction de la solution.

Ce plan de travail est toujours présenté à travers une fiche méthode ou simplement à travers la résolution d'un problème particulier (souvent il s'agit d'un problème de géométrie). La solution est écrite mais rarement commentée. Aucun problème par rapport à la mise en équation(s) ou au choix de l'inconnue n'est soulevée. C'est un peu comme si, après avoir lu la solution, on avait acquis une méthode pour résoudre tous les autres exercices sur la mise en équation(s). Ce n'est bien sûr pas le cas ! La première et plus particulièrement la deuxième étape sont très mal expliquées.

Il arrive que dans les exercices proposés, la mise en équation(s) soit concrétisée par l'une des 3 démarches suivantes :

- Démarche 1 : Présentation de l'énoncé qui peut se découper exactement en fonction de chacun des morceaux d'équations à écrire ou de chacune des équations à écrire.
- Démarche 2 : Ajout à l'énoncé d'une suite de questions facilitant la lecture

- Démarche 3 : Ajout à l'énoncé d'une figure décrivant la situation de telle sorte que la lecture de l'énoncé soit plus facile

J'ai effectué une recherche dans un bon nombre de manuels de seconde sur la manière dont la mise en équation(s), en inéquation(s) ou en système de deux équations à deux inconnues est traitée. Un récapitulatif de ces recherches sur quelques manuels, mettant en valeur les 2 premières étapes de la résolution, et les démarches proposées de la mise en équation, se trouve sur le tableau de l'annexe 1. Ce tableau montre bien que le travail sur le choix de l'inconnue et sur la mise en équation est évincé ou tellement guidé que l'exercice en perd son intérêt principal.

Quelques statistiques de l'APMEP

Mon expérience sur le taux de réussite des élèves face à la mise en équation étant limitée, je me suis intéressée à une étude de l'APMEP faite sur des classes de seconde sur les problèmes aboutissant à des mises en équation(s). L'annexe 8 présente quelques exemples d'exercices de ce type ainsi que le pourcentage de réussite de la mise en équation elle-même. La forme des 3 premiers exercices semble décourager beaucoup d'élèves. En effet, ils comportent beaucoup de données autant au niveau du texte que des représentations annexes. Une hypothèse à ce sujet est émise par la brochure : *“ Les élèves ne sont peut-être pas habitués à travailler sur des situations riches... Ce n'est pas la mise en équation qui rebute comme semble le prouver le taux de non-réponses normal aux problèmes courts comme les exercices 4 et 5 ”*.

Au vu de ses chiffres, il semblerait aussi que les problèmes aboutissant à une équation ont un taux de réussite plus élevé que les problèmes aboutissant à un système de deux équations à deux inconnues. Le nombre d'inconnues étant plus important cela augmente le nombre de données et donc semble plus difficile à comprendre. Ces premières observations m'ont déjà permis d'avoir une idée sur les exercices à mettre dans ma première expérience.

II / PREMIÈRE EXPÉRIMENTATION ET REGARD SUR LA SÉANCE

Critères de choix des exercices

Avant de définir le cadre à l'intérieur duquel cette étude a été faite, il faut donner les critères de choix des exercices proposés aux élèves (voir annexe 2) et qui vont servir de support à la recherche. Comme l'exige le programme, je me suis attachée à trouver des exercices issus de domaines différents (arithmétique, vie économique et sociale, physique, problème de la vie courante...) tout en m'efforçant de garder un caractère ludique.

Outre le caractère amusant, il faut bien sûr que les énoncés puissent se traduire sous forme d'une équation, d'un système d'équations que doit satisfaire la ou les inconnues. J'ai volontairement écarté le cas des

inéquations ou des systèmes d'inéquations car la seule différence qui existe avec les équations ou les systèmes d'équations se situe au niveau du signe “ < ” ou “ > ”. La difficulté de savoir si l'on mets “ < ” ou “ > ” ne fait pas partie des objectifs de ce mémoire. Toute situation invraisemblable a été volontairement écartée ou modifiée afin que l'exercice relate une situation réelle facilitant ainsi la compréhension du texte.

Certains exercices comme les exercices 1, 3, 5 et 6 (annexe 2) ne peuvent pas être résolus par l'arithmétique pratique mais nécessite l'utilisation de la mise en équation(s) pour résoudre le problème. D'autres, comme l'exercice 2 (annexe 2) vont laisser l'impression d'une réponse immédiate mais qui se révèle fausse une fois l'équation posée et résolue. L' exercice 6 (annexe 2) va avoir un aspect motivant de part son résultat surprenant. Bref, des exercices qui montrent aux élèves que la mise en équation(s) est un outil utile et rapide pour résoudre certains problèmes.

Enfin une petite analyse de plusieurs énoncés de problèmes m'a permis de voir que tous n'étaient pas équivalents ; en effet, l'analyse du passage de l'énoncé à l'écriture des équations portent sur deux points :

- L'identification des quantités inconnues décrites ou désignées dans l'énoncé et la conversion de leur expression linguistique en une expression algébrique. Très souvent les problèmes de mise en équation(s) n'utilisent qu' une ou deux lettres désignant la ou les inconnues alors que les quantités inconnues sont en nombre plus important.

Deux cas peuvent alors se présenter :

⊆) Le cas de transparence : l'identification des quantités inconnues coïncide avec le choix des inconnues. L'énoncé exprime les quantités inconnues à l'aide d' une ou deux dénominations de base suivant qu'on ait une équation ou un système de deux équations à trouver. Alors la conversion des expressions linguistes en expressions algébriques est immédiate.

⊆) Le cas d'opacité : l'énoncé exprime les quantités inconnues en recourant à plus de dénominations de base que dans le cas de transparence. Alors un travail de redésignation des quantités inconnues est nécessaire pour passer aux expressions algébriques.

- L'identification des relations d'égalité permettant l'écriture des équations.

Deux cas possibles :

⊆) Le cas de marquage explicite des relations : la phrase de l'énoncé peut se transcrire immédiatement en une équation.

⊆) Le cas de marquage semi-implicite ou entièrement implicite des relations : l'énoncé ne donne pas explicitement ou masque les relations entre les quantités inconnues.

Ces différents cas peuvent être récapitulés dans le tableau suivant :

	Cas de transparence	Cas d'opacité
Marquage des relations explicites et	Exercice de type :	Exercice de type :

conversion immédiate	A1 Exercices 1 et 2 (Annexe 2)	B1 Exercice 4 et 5 (Annexe 2)
Marquage des relations partiellement implicites ou complètement implicites	Exercice de type : style="text-align: center;"> A2 Exercice 3 (Annexe 2)	Exercice de type : style="text-align: center;"> B2 Exercice 6 (Annexe 2)

Mise en place de la séance

La séance est prévue en module. La classe est divisée en deux groupes de 14 et 15 élèves pour une durée d'une heure et trente minutes par groupe. Le module est une séance particulièrement bien adaptée pour des travaux de recherche de part sa durée et du fait du petit nombre d'élèves présents. Chaque élève se verra distribuer une feuille de 6 exercices traitant de problèmes sur la mise en équation(s) (voir annexe 2). Les consignes de travail, écrites au tableau, seront les suivantes :

Chaque élève aura besoin de 2 feuilles. Une première qui jouera le rôle de brouillon que le professeur ramassera à la fin du module afin de voir et de comprendre les pistes empruntées et les erreurs rencontrées par les élèves. Sur cette feuille l'élève ne devra pas utiliser d'effaceur, il pourra barrer ce qui lui semble faux ou inutile, il écrira tout ce qu'il lui semble utile à la résolution du problème : équations, inconnues mais aussi graphiques, dessins pouvant illustrer le problème. La deuxième feuille fera office de propre. Sur cette feuille sera rédigée une solution détaillée et correcte.

La séance est découpée de la manière suivante :

- 1^{er} étape : Première phase de recherche au brouillon sur les exercices 1, 2 et 3 qui devrait durer environ 20 minutes. On demande uniquement d'écrire la ou les équations qui permettront de répondre à la question de l'exercice en précisant bien les inconnues choisies, la résolution de l'équation ou du système d'équations n'est pas demandée. En effet le but de la séance est de réfléchir sur la mise en équation(s) et non pas sur les méthodes de résolution. Recherche individuelle, pas de communication pour le moment entre les élèves.
- 2^e étape : Mise en commun des résultats des 3 exercices au tableau. Le professeur rédigera au tableau une solution complète proposée par un ou plusieurs élèves. Il fera apparaître au maximum le passage du langage habituel au langage algébrique. Il gèrera le dialogue entre les élèves sur les difficultés rencontrées ou sur les différentes solutions proposées.
- 3^e étape : Avec ses premières explications et ces premiers conseils, les élèves reprendront une phase de recherche individuelle sur les exercices 3 à 6.

- 4^e étape : Une deuxième mise en commun sera faite avec les mêmes objectifs que la première. Enfin le professeur ramassera les brouillons de chaque élève comme il l'avait annoncé au début de la séance.

Analyse a priori de cette séance

Un des objectifs de cette première séance sur la mise en équation(s) est de repérer le niveau, les difficultés et les erreurs que rencontrent les élèves lors de la résolution d'un problème de mise en équation(s). Cette séance a été construite de telle façon que chaque élève puisse être en activité et en phase de recherche sur des exercices. L'accent n'étant pas mis sur le résultat mais sur le raisonnement, chaque élève aura l'opportunité d'écrire ce qu'il croit être juste sans se voir immédiatement découragé par un résultat non identique à celui du professeur.

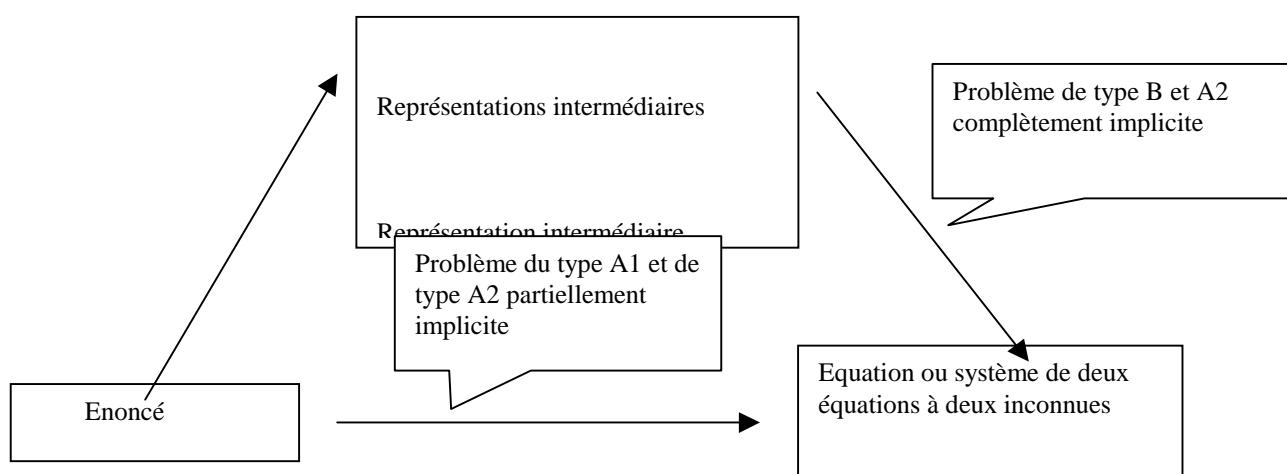
La mise en commun aura pour but de donner évidemment la solution au problème mais surtout de laisser la possibilité aux élèves de s'exprimer sur les recherches qu'ils ont entreprises sur les exercices. Les erreurs de certains seront alors soulevées et corrigées par d'autres élèves si c'est possible.

En ce qui concerne les exercices proprement dit, les élèves n'ayant eu comme enseignement qu'un entraînement de type classique (choix de l'inconnue, mise en équation(s), résolution et interprétation du résultat), le passage aux équations devrait être direct dans le cas du problème de type A1, causer des difficultés à certains élèves dans le cas de type A2 car même si le problème ne figure pas au niveau du choix des inconnues, beaucoup d'élèves se heurteront à des difficultés liées aux relations semi-implicites ou implicites.

Pour les problèmes de type B, le passage aux équations va sans doute être difficile pour la plupart des élèves puisque le choix des inconnues n'est plus aussi évident que dans les cas de type A1 et A2.

On attend vraisemblablement de la part des élèves un détour par une ou plusieurs représentations intermédiaires.

On pourrait schématiser la démarche attendue par les élèves par la représentation suivante :



Un autre objectif de cette séance sera donc de vérifier si les élèves adoptent un schéma de ce type et de repérer quelles sont les représentations intermédiaires qu'ils utilisent ou pourraient utiliser.

Déroulement et analyse a posteriori de la séance

La première séance d'expérimentation a donc eu lieu en module comme prévu et, une fois les consignes mises au tableau, les élèves se sont pris au jeu de chercher et surtout de remplir un brouillon de toutes les idées et les représentations qu'ils ont pu avoir sur les exercices posés. Les brouillons et la phase de mise en commun m'ont permis de mieux cerner les difficultés rencontrées par mes élèves.

Il s'avère que beaucoup d'entre eux présentent ce que Kourkoulos¹ appelle des “*défauts de représentations concernant les objets à identifier dans les énoncés de problème*”. Dans son travail de thèse, Kourkoulos en a établi une typologie de base et parle exactement de 10 défauts de représentation. L'analyse des six exercices qui suit de la première expérience en donnera quelques exemples.

On voit aussi apparaître des incompréhensions ou des oublis dans la lecture de l'énoncé concernant la détermination des relations à prendre en compte. On s'aperçoit clairement que les élèves ont du mal à identifier les relations qui permettront d'articuler les quantités inconnues pour donner une équation, quand il n'y a pas un abandon pur et simple devant une tâche qui leur paraît insaisissable.

Analyse de l'exercice 1 (de type A1) :

Cet exercice est un cas de transparence et de relations explicites. L'énoncé exprime les quatre quantités inconnues : “ prix de deux cafés ”, “ prix de trois bières ”, “ prix de trois cafés ” et “ prix de deux bières ” en fonction de deux inconnues de base, à savoir “ le prix d'un café ” et “ le prix d'une bière ” qui sont les deux inconnues cherchées. La conversion est donc immédiate. En désignant x et y les deux inconnues de base, les quatre quantités inconnues s'écriront respectivement : $2x$, $3y$, $3x$ et $2y$. Les mots “*et*” et “*font*” dans les phrases “ trois cafés *et* deux bières *font* ... ” et “ deux cafés *et* trois bières *font* ... ” sont les expressions pertinentes pour l'écriture de l'équation.

Mais ce qui rend l'identification des relations bien explicites, c'est que, d'une part, on a une phrase par équation et ,d'autre part, l'organisation syntaxique de la phrase peut-être mise en correspondance terme à terme avec l'organisation de l'équation. Parmi les élèves des deux groupes, aucun problème sur la mise en équation(s) n'a été relevé dans cet exercice, tous les élèves ont su poser le système correctement. Par contre les inconnues ont souvent été posées de façon incorrecte.

Bons nombres d'élèves ont écrit : “ soit x le café et y la bière ” au lieu d'écrire “ x le prix d'un café et y le prix d'une bière ” . Cette erreur de langage est en fait ce que Kourkoulos appelle un “*défaut de coefficient de proportionnalité référentielle*”. Il y a défaut de coefficient de proportionnalité référentielle quand l'unité et la

¹ Kourkoulos : Modélisation mathématique de situations aboutissant à des équations du premier degré, Strasbourg, thèse ULP, (1990)

quantité qui lui correspond sont représentées par le même symbole. Cette erreur d'identification n'empêche pas d'arriver à la mise en équation(s) correcte du problème car dans cet exercice on considère un seul aspect des inconnues, à savoir le prix du café ou de la bière. S'il avait fallu considérer le prix et le nombre de cafés, alors ce défaut de représentation aurait entraîné une mauvaise écriture de certaines équations comme nous le verrons dans l'exercice 4 un peu plus tard.

Analyse de l'exercice 2

Cet exercice de type A1, comme le précédent, a déclenché des réponses immédiates de la part de certains élèves. "C'est facile, le poids du bouchon est de 10 g" dit Eric. Je leur affirme que non, sans expliquer pourquoi, et leur demande de trouver une ou deux équations permettant de résoudre le problème. Aucun élève ne m'a écrit une équation, tous avaient posé deux inconnues et pour la plus part le système fut correctement écrit, mais je vis tout de même cela :

$$\begin{cases} x + y = 110 \\ x + 100 = 110 \end{cases} \quad \text{donc } x = 10$$

La phrase "la bouteille pèse 100 g de plus que le bouchon" n'a pas du tout été comprise ou a été lue beaucoup trop vite !

Analyse de l'exercice 3

Cet énoncé de type A2 rentre dans le cas transparent pour l'identification des objets. En effet les quatre quantités inconnues sont faciles à déterminer : "le temps de vidange des voitures", "le temps de changement des carburateurs de scooter", "le prix des vidanges des voitures" et "le prix des changements de carburateur de scooters" en fonction des deux inconnues de base "le nombre de vidanges" et "le nombre de carburateurs changés" qui correspondent aux deux quantités cherchées.

En revanche, les relations nécessaires pour écrire les équations ne sont pas toutes marquées explicitement. Cette fois-ci, une phrase ne correspond plus à une équation. Il faut dégager les informations des deux phrases, afin d'obtenir les quatre quantités inconnues et additionner les deux quantités qui correspondent au temps et les deux quantités qui correspondent au prix. Les relations qui permettent d'écrire les équations sont semi-implicites.

La conversion est possible seulement si l'élève a pris conscience que "Le temps mis pour vidanger x voitures + le temps mis pour changer y carburateurs = 450 minutes" et que "le prix de x vidanges + le prix de y changements de carburateur = 675 francs".

Si pour la plupart des élèves le choix des inconnues était facile à trouver, l'écriture des équations ne l'a pas été pour tous. En effet, certains élèves sont restés complètement bloqués face à cet exercice. Une dizaine ont persévéré mais sont arrivés à des équations fausses.

Voici quelques exemples d'erreurs retrouvées chez ces élèves:

-) Comme dans l'exercice 1, on retrouve le *défait de coefficient de proportionnalité*. Ces élèves représentent l'unité et la quantité par le même symbole. Ils écrivent "soit x la vidange et y le changement de carburateur" au lieu de considérer le nombre de vidanges et le nombre de changements de carburateur.

•) Une des raisons pour lesquelles certains élèves ont écrit des équations fausses a été la conversion des heures en minutes. David obtient par exemple comme 1^{ère} équation $1,3x + 0,45y = 7,3$, il convertit donc 1h30 en 1,3 et 45 min en 0,45. Bref pour lui, 1heure est égale à 100 min au lieu de 60 min. Un petit entretien avec cet élève sur les heures, les minutes et les secondes lui a vite permis de voir et de comprendre son erreur.

•) Sur le brouillon de beaucoup d'élèves, j'ai pu relever certaines égalités qui souvent représentaient des correspondances. Par exemple Valentine écrit :

$$\begin{aligned} & \text{“ } 7\text{h}30 = \text{vidanges} + \text{carburateurs} = 675 \text{ F} \\ & \quad x = 90 \text{ min} = 125 \text{ F} \quad \text{et} \quad y = 45 \text{ min} = 75 \text{ F} \text{”} \end{aligned}$$

Grégory et Cyril ont écrit :

$$\begin{aligned} & \text{“ } 450 \text{ min} = 675 \text{ F} \text{ total gagné} \\ & 90 \text{ min} = 125 \text{ F} \text{ total pour 1 vidange} \\ & 45 \text{ min} = 75 \text{ F} \text{ total pour 1 carburateur} \text{”} \end{aligned}$$

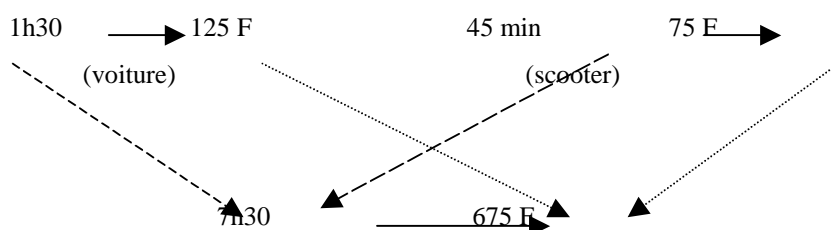
Mais aucun ne va jusqu'au *défaut d'égalité de correspondance* qui serait de ne prendre en compte que les objets de référence que le texte met en correspondance pour écrire l'équation. L'égalité écrite signifie seulement une correspondance. Un élève ayant ce défaut écrirait : $90x + 125y = 450$ ou $45x + 75y = 675$. Valentine a bien compris qu'on ne peut additionner des objets ayant 2 dimensions différentes. Ce qui a sans doute permis à Valentine d'écrire le système correctement, c'est que $7\text{h}30 = \text{temps des vidanges} + \text{temps consacré aux carburateurs}$ et $675 \text{ F} = \text{prix pour les vidanges} + \text{prix pour les changements des carburateurs}$.

Quant à Grégory et Cyril, on a l'impression qu'il ont rangés leurs informations un peu comme dans un tableau

450	675	Total
90	125	Pour 1 vidange
45	75	Pour 1 carburateur

Du coup une lecture verticale permet de trouver les relations semi-implicites et d'écrire les équations du système.

Toujours sur ce même exercice, Nicolas a représenté ses correspondances encore d'une autre manière. Il a écrit



Son système de flèches montre bien qu'il est conscient qu'il devra additionner les deux temps pour obtenir le temps total et additionner les deux prix pour obtenir la somme gagnée.

•) Thomas est un élève particulièrement intéressant car il semble qu'il présente plusieurs défauts de représentation. Voici ce que Thomas a écrit :

$x = \text{le nombre de temps}$

$y = \text{le prix payé}$

$$\begin{cases} 90x + y = 125 \\ 45x + y = 75 \end{cases}$$

En analysant ces équations, il semblerait que Thomas essaie de faire correspondre la 2^{ème} phrase de l'énoncé à une équation. Cette erreur semble se rapprocher du *défaut d'égalité de correspondance* que j'ai déjà évoqué pour Valentine, Grégory et Cyril. Cette erreur pourrait aussi être le *défaut de somme référentielle* c'est à dire que le seul aspect pris en compte par l'élève pour effectuer une somme est celui des différents objets désignés dans le texte, en négligeant la dimension sémantique dont ces objets relèvent. Une somme non homogène est alors effectuée. En effet Thomas additionne une quantité représentant le temps avec une quantité représentant un prix pour obtenir une quantité représentant un temps.

On pourrait également diagnostiquer le *défaut de la variable indiquée*, c'est à dire que le bloc ax, ici 90x, représente une correspondance et non pas une multiplication. Dans le même ordre d'idée 90x pourrait être aussi le *défaut de bloc référentiel de forme multiplicative*, c'est à dire que l'élève utilise le bloc ax sans en comprendre précisément la signification, seul l'aspect référentiel est pris en compte. Pierre pourrait également être un candidat pour ce genre d'erreurs puisqu'il écrit 125x et x = le prix.

Mise en commun des exercices 1, 2 et 3 :

En ce qui concerne l'exercice 1, la mise en commun fut très rapide puisque tous les élèves avaient trouvé le bon système. Un accent fut tout de même mis sur le choix de l'inconnue à savoir qu'il faut désigner précisément ce que représente l'inconnue. Par exemple " soit x le prix de la bière " et non " soit x la bière ". En ce qui concerne l'exercice 2, le système est très vite apparu au tableau, mais il a fallu le résoudre pour enlever tout doute aux élèves qui pensaient toujours que le poids du bouchon était 10g. Certains élèves faibles avaient préféré chercher la solution en tâtonnant plutôt que d'écrire des équations. L'exercice n'aura pas eu grand intérêt pour eux. Pour l'exercice 3, la même remarque qu'à l'exercice 1 fut faite et le système apparut rapidement grâce au tableau remanié de Grégory.

Analyse de l'exercice 4 (de type B1) :

Cet énoncé est de type B1, car il est opaque à la réduction des quantités inconnues en deux inconnues de base. Les relations sont explicites. Il y a quatre quantités inconnues : " un nombre de deux chiffres " (le nombre cherché), " le 1^{er} chiffre ", " le 2^{ème} chiffre " et " le nombre obtenu en permutant les deux chiffres ". Une relation d'égalité est explicite à savoir " la somme de ces deux chiffres est égale à 12 " et c'est cette relation qui a mis tous les élèves de la classe sur la piste des deux dénominations de base à choisir. Pratiquement tous les élèves ont posé " soit x le 1^{er} chiffre et y le 2^{ème} chiffre alors $x + y = 12$ ".

Par contre, la suite a été nettement moins facile pour eux. En fait, un bon tiers de la classe a abandonné à ce niveau là, les deux tiers restant sont restés bloqués, ne pouvant répondre à une question " comment écrire le

nombre à l'aide de x et y ? ". Seul Sébastien a réussi à voir sans aide que le nombre pouvait s'écrire $10x + y$. Les autres ont souvent écrit que le nombre était la juxtaposition des deux chiffres, c'est à dire xy .

Ainsi David a obtenu le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ yx = xy - 18 \end{cases}$$

Mathieu et Nicolas ont considéré que $x + y$ était le nombre et ont donc obtenu

$(x + y) - (y + x) = 18$ comme équation puisque $y + x$ devenait le nombre permuté.

Ces deux exemples montrent bien que les relations d'égalité sont explicites mais que le choix des deux inconnues de base n'entraîne pas forcément une écriture des quantités inconnues. Enfin certains élèves confondaient le chiffre et le nombre et du coup le problème leur semblait impossible.

Analyse de l'exercice 5

Cet exercice de type B1 comme le précédent permet de voir que les énoncés peuvent être opaques pour l'identification des objets et explicites pour l'identification des relations. Ces deux facteurs totalement indépendants pour la compréhension et la conversion des énoncés mettent pourtant les élèves en difficulté dès que l'un des deux se complique. En effet, bien que les relations d'égalité soient explicites " le parcours a duré 270 secondes " et " la montée est de 126m plus longue que la descente ", peu d'élèves arrivèrent à un système correct.

Vincent a écrit :

$x = \text{la montée}$

$y = \text{la descente}$

$$\begin{cases} x + y = 270 \\ x = y + 126 \end{cases}$$

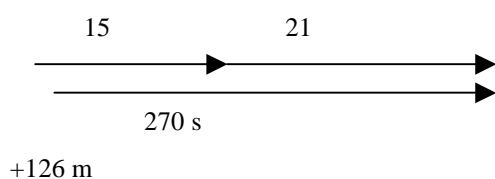
Il y a *défaut de variable référentielle*. Le seul aspect pris en compte pour le choix d'une inconnue est une action particulière ou une situation concrète. Il n'y a pas de distinction entre inconnues qu'on note x et y et quantités inconnues. En effet " la montée ", " la durée de la montée " et " la longueur de la montée " sont des expressions qui désignent trois choses très différentes. Il en résulte un emploi équivoque de x dans les deux équations pour désigner l'une " la durée de la montée " et dans l'autre " la longueur de la montée ".

Jonathan et Mathieu ont écrit :

$$\left. \begin{array}{l} x = \text{descente} \\ y = \text{montée} \end{array} \right\} \longrightarrow \text{distance} \quad \begin{cases} 126 + x = y \\ 15y + 21x = 270 \end{cases}$$

En interrogeant les élèves, j'ai su que $15y$ représentait le temps mis pour monter et $21x$ le temps mis pour descendre. Ce qui est bien sûr faux . La relation vitesse \times temps = distance ne semble pas connu.

Jeremy n'a su que dessiner ceci :



En l'interrogeant, j'appris qu'il aurait aimé représenter les informations de l'énoncé mais que le moyen exact lui manquait.

Hervé, lui, a proposé un tout autre choix d'inconnues :

$t = \text{temps de la montée}$

$d = \text{distance de la montée}$

$$\begin{cases} t + \frac{d}{21} = 270 \\ d + 126 = 15t \end{cases}$$

Il aurait été intéressant d'étudier les différents systèmes qu'on peut écrire lorsqu'on choisit des inconnues différentes mais malheureusement, le temps manquait et, avant de voir le brouillon d'Hervé, je n'avais pas vu sa solution.

Enfin j'ai eu droit à des choses farfelues comme :

$x = \text{longueur de la montée}$

$y = \text{longueur de la descente}$

$$\begin{cases} x = 126 - y \\ 21y = 126 - 15x \end{cases}$$

Grégory semble tout mélanger, de plus il oublie complètement une donnée importante à savoir 270 secondes. Les produits $21y$ et $15x$ n'ont aucun sens et surtout ne représentent pas une longueur comme il semble le croire.

J'ai aussi vu :

$x = \text{temps de la montée}$

$y = \text{temps de la descente}$

$$\begin{cases} 15x = 126 \\ 126 + 21y = 270 \end{cases}$$

Toutes les données de l'énoncé semblent présentes dans le système mais Geoffrey n'écrit pas des équations homogènes. La première équation n'utilise qu'une inconnue et surtout ne correspond pas du tout à " la montée est 126 m plus longue que la descente ". Pour la deuxième équation, il semblerait qu'il y a *défaut de somme référentielle*, car il additionne deux longueurs pour obtenir un temps.

Analyse de l'exercice 6

L'exercice n'a pas été abordé par manque de temps.

Mise en commun des exercices 4 et 5

La discussion sur l'exercice 4 fut beaucoup plus intéressante puisqu'une seule personne détenait la réponse et ne l'avait pas communiquée. A la question " comment doit-on écrire le nombre à l'aide de x et y ", certains élèves ont répondu : xy . Mais heureusement, beaucoup sont restés septiques face à cette écriture et

Valentine, qui n'avait pas trouvé de solution, a fait remarquer à toute la classe, lors de la mise en commun, que xy signifie x multiplié par y et non le nombre cherché.

C'est alors que Sébastien est intervenu en expliquant que, par exemple 54 pouvait aussi s'écrire $5 \times 10 + 4$. Et après avoir distingué le chiffre des dizaines et le chiffre des unités, la solution est alors apparue à beaucoup d'entre eux.

La mise en commun de l'exercice 5 fut un peu plus chaotique, vu que peu d'élèves avaient abouti au système avec leur choix d'inconnues. Je proposais donc d'envoyer un élève qui avait une solution juste et surtout claire au tableau. A la question " pourquoi choisir le temps comme inconnue ? ", l'élève répondit que la question du problème était " combien de temps a duré la montée ? ". Enfin l'écriture de la formule vitesse \times temps = distance ne satisfait pas tous les élèves. C'est sur cet exercice que se termina la séance dans les deux groupes.

Cette séance m'a effectivement permis de relever pas mal d'erreurs et en particulier des défauts de représentation mais aussi des oublis au niveau des données de l'énoncé et des incompréhensions partielles ou complètes des relations à prendre en compte dans l'énoncé. Les difficultés sont apparues comme je l'avais prévu pour les exercices de type B.

Quelques élèves ont fait apparaître sur leur brouillon des représentations intermédiaires (ébauche de tableau, correspondance avec des flèches) mais aucun ne maîtrisait vraiment ces outils. Enfin je compris que beaucoup d'élèves se sentaient démunis face à ses mises en équation et en particulier avec le dernier exercice abordé. Beaucoup d'élèves ont abandonné et n'écrivaient même plus sur leur brouillon. Il me fallait donc trouver une solution pour leur permettre de résoudre ce genre de problème, ou du moins pour leur permettre de faire un travail de recherche sur ce genre d'exercice qui leur paraît inabordable.

III / QUELLES SOLUTIONS APPORTER AUX PROBLÈMES DÉTECTÉS

Construction d'une séance d'enseignement

L'analyse de ces exercices montrent que les élèves se lancent souvent dans l'écriture des équations sans avoir pris le temps d'analyser les données et de lire l'énoncé en décortiquant au maximum les informations. Ce qui entraîne souvent une compréhension insuffisante de l'énoncé et un mauvais choix des inconnues.

D'une façon générale, la compréhension d'un énoncé de problème consiste dans l'identification des objets que l'énoncé décrit et dans l'identification des relations qu'il établit entre ces objets. Les objets à identifier sont des quantités inconnues ; attention, ce ne sont pas ce qu'on appelle habituellement les inconnues et qu'on note en général x et y . x et y sont appelés inconnues de base et les quantités inconnues s'expriment en fonction de x et y . Les relations entre les objets sont les relations qui permettent d'articuler les quantités inconnues qu'on identifiera à une équation.

Comment apprendre aux élèves que comprendre un énoncé consiste donc d'abord à identifier les expressions linguistiques décrivant les quantités inconnues puis celles décrivant les relations liant ces quantités inconnues.

Je me suis alors inspirée de la méthode proposée par Nicole Cordier dans les Annales de didactique et de sciences cognitives et de la méthode proposée par l’IREM de Strasbourg dans “ Problèmes de mise en équation(s) ”. Le but de cette deuxième expérience sera de faire en sorte que les élèves s’approprient une procédure pour interroger le texte de façon à :

- extraire toutes les informations possibles, relever les données et les unités de ces données
- organiser ces informations selon une disposition qui permettra d’écrire facilement la ou les équations.

Cela implique donc un classement des données de l’énoncé en fonction des différentes dimensions dont elles relèvent. Il s’agit donc du passage de l’énoncé à une présentation sous forme de tableau, mais sans leur donner le tableau. L’intérêt est qu’ils apprennent à construire une grille de questions pour lesquelles les réponses se croisent deux à deux. Cette procédure précède le choix des inconnues, puisque c’est seulement après avoir classé les données de l’énoncé qu’on pourra découvrir les quantités inconnues et surtout choisir les bonnes inconnues de base.

La première expérience a permis de diviser les élèves en deux groupes suivant leurs difficultés. Les résultats de la première expérience sont résumés dans le tableau ci-dessous, en tenant compte uniquement des élèves qui écrivent des équations correctes avec éventuellement des inconnues mal définies, et des élèves qui n’ont pas traité l’exercice ou ont échoué pour l’écriture des équations.

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4	Exercice 5	Exercice 6
Réussite	27	23	20	1	7	0
Echoué ou non traité	2	6	9	28	22	29

Les résultats du tableau ci-dessus montrent que ce sont les exercices de type B pour lesquels les élèves ont le plus de difficulté, comme je l’avais prévu antérieurement. C’est pourquoi la deuxième expérience ne comportera que des exercices de type B.

Dans l’annexe 3, les exercices 2 et 3 ont la forme de l’exercice 1 et la construction du tableau se fait de la même manière que dans l’exercice 1 qui sera donné en exemple. Seules les relations qui lient les quantités inconnues diffèrent. Les exercices 4 à 6 sont différents au niveau de la forme de l’énoncé. Dans les exercices 1 et 2, on n’obtient normalement qu’une seule équation. Ils présentent tous les trois des relations cachées, implicites, ce qui n’est pas le cas dans les exercices 1 à 3. Cette particularité va augmenter la difficulté de ces exercices et notamment pour construire le tableau.

L’exercice 5 avait déjà été posé dans la première séance mais n’avait malheureusement pas été abordé, c’est pourquoi il figure à nouveau sur la feuille d’exercices. La séance est la même pour les deux groupes, il y aura simplement une différence au niveau de la vitesse d’exécution et de compréhension des exercices.

Pour cette séance , le professeur distribuera une feuille polycopiée à chaque élève sur laquelle se trouvent trois choses essentielles :

- des remarques générales sur la mise en équation(s) commentées oralement par le professeur par rapport au travail fait dans la séance précédente
- une proposition de démarche pour trier et analyser les informations de l'énoncé.
- 6 exercices à résoudre

Il est prévu pour cette séance de faire lire à un élève toute la partie précédant les exercices, de commenter et de répondre aux questions des élèves. Une fois que les élèves auront pris connaissance de l'énoncé de l'exercice 1, le professeur, avec la participation de la classe, se lancera dans la démarche proposée pour la résolution de l'exercice. Puis les élèves pourront appliquer cette démarche sur tous les autres exercices qui leur paraissent difficiles à mettre en équation.

Les élèves qui se sentiront capables de poser la ou les équations sans passer par cette démarche ne seront bien sûr pas obligés de l'utiliser. Un temps de recherche sera alors laissé aux élèves pour trouver les exercices 2 et 3. Une correction collective est prévue juste après.

On procèdera de même avec les exercices 4 et 5 puis avec l'exercice 6, si le temps le permet.

Déroulement de la séance d'enseignement

Le début de la séance se passa comme prévu et une fois que les élèves eurent pris connaissance des remarques et de l'énoncé de l'exercice 1, la procédure d'analyse du texte de l'énoncé a pu commencer. A la question "quelles sont les données de l'exercice ?", les premières réponses étaient des chiffres. Il a donc fallu faire prendre conscience aux élèves que chaque nombre représentait quelque chose en particulier. Ainsi on a obtenu la liste suivante :

13 kg/min et 21 kg/min — Production
 510 minutes — Temps
 238 kg — Masse

A la question "Quels sont les objets que l'on considère ?", la réponse fut immédiate : la première machine et la deuxième machine.

A la question " Comment organiser les données ?", il était naturel pour les élèves de répondre " dans un tableau ". A leur dictée, on a obtenu le tableau suivant :

	1 ^{ère} machine	2 ^{ème} machine
Production (en kg/min)		
Temps (en min)		
Poids (en kg)		

Cette première étape ne posa de problème à personne. La deuxième étape demandait de placer les nombres dans le tableau. Très rapidement on plaça 13 kg/min et 21 kg/min, mais les nombres 510 et 238 posèrent problème. Nicolas dit alors “ il manque une colonne dans votre tableau ! Il faut ajouter une colonne total ! ”. Valentine fit alors remarquer que la colonne total marchait bien pour 510 minutes mais ne marchait pas pour 238 kg. Devant leur silence, je proposais alors de faire une colonne notée “ relations ” où l’on inscrirait les relations données par l’énoncé de l’exercice pour une même donnée.

Le tableau est alors devenu :

	1 ^{ère} machine	2 ^{ème} machine	Relations
Production (en kg/min)	13	21	Aucune relation ne lie les deux productions
Temps (en min)			510 min en tout
Masse (en kg)			La 1 ^{ère} machine a produit 238 kg de plus que la 2 ^{ème}

La recherche des quantités devient alors évidente pour tous, les quatre cases vides correspondent alors aux quatre quantités inconnues. Parmi ces quatre quantités inconnues, lesquelles choisir pour inconnues de base ? Ludovic propose le temps des deux machines, “ pourquoi ? ” demande Eric. Ludovic répond alors qu’on cherche le temps pendant lequel a fonctionné la première machine, et qu’il était donc logique de mettre x et y dans les cases correspondant au temps des deux machines.

Pour remplir les deux cases restantes, les élèves eurent plus de mal. A la question “ Connaissez vous une relation entre la production, le temps et la masse ? ”, il y eut un silence. Par contre à la question “ que mettons dans les deux cases vides ? ”, certains ont su répondre, mais sans expliquer pourquoi. La relation “ production × temps = masse ” ne les aida pas vraiment par contre lorsque j’écrivis “ kg/min × min = kg ” tout s’éclaircit. Le tableau complet devint donc :

	1 ^{ère} machine	2 ^{ème} machine	Relations
Production (en kg/min)	13	21	Aucune relation ne lie les deux productions
Temps (en min)	x	y	510 min en tout
Masse (en kg)	13x	21y	La 1 ^{ère} machine a produit 238 kg de plus que la 2 ^{ème}

Enfin il restait à lire la 2^{ème} et la 3^{ème} ligne du tableau pour obtenir les deux équations. On obtenait :

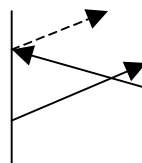
$$\begin{cases} x + y = 510 \\ 13x = 238 + 21y \end{cases}$$

Analyse de la séance d'enseignement

L'exercice 2 ne posa aucun problème, il fut correctement fait par tous les élèves. Beaucoup d'entre eux passèrent par le tableau et furent souvent étonnés, surtout dans le premier groupe, de la réussite de leur recherche. Des exemples de copies sur l'exercice 2 sont présentées sur l'annexe 4.

Comme pour l'exercice précédent, le tableau de l'exercice 3 fut une réussite pour tous les élèves qui l'ont tenté. Par contre la même erreur pour environ 6 ou 7 élèves fut faite lorsqu'il a fallu traduire la phrase " la fontaine a versé 15 l de plus que le robinet " (voir annexe 5). A ce niveau on peut déjà dire que le tableau n'apporte rien aux élèves qui ont simplement un problème de transcription du langage habituel vers le langage mathématique.

Pour l'exercice 4, le premier problème rencontré concernait la façon dont la mouche se déplaçait. Certains m'avaient dessiné ce schéma :



Ils pensaient que la mouche se déplaçait en zigzag de gauche à droite de la route. Chose à laquelle je ne m'attendais pas du tout. Il a donc fallu éclaircir le parcours de la mouche au tableau.

Après cela, je m'attendais à ce que certains me disent " puisque la mouche va trois fois plus vite qu'un cycliste, elle parcourt aussi trois fois plus de distance ". Et bien non, la relation vitesse \times temps = distance reste apparemment quelque chose de très compliquée pour eux. La construction d'un tableau a apporté la solution à certains d'entre eux, mais pour la plupart, le tableau a été difficile à remplir du fait que les relations permettaient de remplir les cases manquantes directement et non d'écrire des équations.

Une des difficultés de cet exercice était de trouver la relation implicite suivante : " le temps pendant lequel les deux cyclistes roulent est égal au temps pendant lequel la mouche vole ". Ce petit coup de pouce permit à beaucoup d'entre eux de conclure et la solution si évidente les laissa perplexes (voir annexe 6).

A partir de l'exercice 5, on remarque une différence entre les deux groupes. Le premier groupe aborde cet exercice peu avant la fin de la séance. Je voulais abandonner cet exercice et passer au suivant directement mais certains curieux ont voulu connaître la solution de l'exercice l'ayant déjà eu à la séance précédente. J'ai donc essayé de bâtir un tableau avec l'ensemble du groupe mais, avec le recul, je m'aperçois que ce n'était pas concluant du tout, pressés par le temps, les élèves n'ont souvent pas pu apporter de solutions aux questions que je posais.

Par contre le deuxième groupe, qui avait été beaucoup plus rapide, avait un temps de recherche normal et le travail fait sur l'exercice était très intéressant. C'est un exercice difficile car il comporte trois relations implicites :

- 98% du nouveau poids des oranges
- Le poids de la matière sèche ne change pas au bout des quelques jours
- Le poids des oranges est égal au poids de l'eau plus le poids de la matière sèche

La première impression de beaucoup d'élèves face à cet exercice était de dire qu'il était facile et que le tableau n'était pas nécessaire. Beaucoup se lancèrent donc dans des calculs "savants" ! J'ai alors pu constater deux mêmes erreurs .

Mathieu a, par exemple, écrit :

$$\text{Poids de l'eau : } 99\% \text{ de } 1000 \text{ g} = 990 \text{ g}$$

$$\text{Poids des oranges : } 98\% \text{ de } 990 \text{ g} = 970,2 \text{ g}$$

Mathieu prend simplement 98% de 99% de 1 kg. Il ne voit pas que les 98% sont à prendre sur le nouveau poids des oranges et non sur le poids de l'eau.

Et Patrick a écrit :

$$1 \text{ kg} \quad \longrightarrow \quad 99\% \text{ d'eau}$$

$$x \text{ kg} \quad \longrightarrow \quad 98\% \text{ d'eau} \quad \text{d'où} \quad x \times 99 = 1 \times 98 \quad \text{et} \quad x = 98 : 99 = 0,989 \text{ kg}$$

Patrick a bien compris qu'on cherche le nouveau poids des oranges et que les 98% étaient, en rapport avec son inconnu x et non pas avec les 1 kg d'oranges. Malheureusement, ses correspondances se transforment en tableau de proportionnalité, ce qui est, bien sûr totalement faux.

Après leur avoir montré leurs erreurs et après avoir précisé à toute la classe qu'on prenait 98% du nouveau poids des oranges, des tableaux apparaissaient tout doucement sur leur feuille. Voici un exemple :

	Poids de l'eau	Poids du reste	Poids des oranges
?	990 g	10 g	1 kg
?			

Tous restaient bloqués à ce niveau. A la demande générale, on essaie de construire cette grille au tableau. Je reproduis donc la grille avec des petites modifications approuvées par les élèves et posait une question qui me semblait pertinente : "en fonction de quoi le poids de l'eau ou des oranges varie-t-il ?". Un élève répond : "au bout de quelques jours !".

Le tableau devient alors :

	Poids de l'eau (en g)	Poids de la matière sèche (en g)	Poids des oranges (en g)	Relations
Aujourd'hui	990	10	1000	
Au bout de quelques jours	$\frac{98}{100} \times x$		x	

Un nouveau temps de recherche est accordé aux élèves pour essayer de compléter le tableau. Pour la plupart, le fait que le poids de la matière sèche n'a pas changé a été vu, mais la relation qui a permis d'écrire une équation a demandé un petit coup de pouce.

Le tableau complet ressemble donc à celui-ci :

	Poids de l'eau (en g)	Poids de la matière sèche (en g)	Poids des oranges (en g)	Relations
Aujourd'hui	990	10	1000	Le poids des oranges = poids de l'eau + poids de la matière sèche
Au bout de quelques jours	$\frac{98}{100} \times x$	10	x	Le poids des oranges = poids de l'eau + poids de la matière sèche

L'équation $0,98x + 10 = x$ a pour solution $x = 500$. Le poids des oranges est diminué de moitié. Etonnement général de la classe ! " C'est fou, jamais on aurait pensé ça ! " dirent certains. Et Ludovic ajouta même : " moralité, il vaut mieux acheter ses oranges au bout de quelques jours, elles seront moins lourdes donc moins chères ! ".

Le dernier exercice ne posait pas de problème. La notion de " avant/après " ayant été vue dans l'exercice précédent, le tableau a été très rapide et la colonne " relations " a directement été écrite avec des équations sans passer par le langage habituel (voir annexe 7).

Synthèse des deux expériences

La deuxième séance a été plus appréciée que la première ; en effet, la plupart des élèves ont été motivés par la démarche proposée notamment dans le groupe 2. Dans le groupe 1, le travail d'organisation en tableau des informations de l'énoncé a pris du temps, mais il a intéressé pratiquement tous les élèves car une solution à l'exercice au bout du travail les attendait. Par contre, les plus faibles ont été rebutés par l'effort d'écriture et de rigueur. Le tableau leur paraissait être une tâche trop longue et inutile, ils se lançaient immédiatement dans l'écriture de ou des équations qui étaient très souvent fausses.

Le recours au tableau ne s'imposait pas nécessairement pour les meilleurs, surtout pour les exercices 2 et 3 (voir annexe 3). Ceux-ci intériorisent entièrement leur démarche d'organisation des données et ne ressentent pas la nécessité de la faire apparaître. Cependant pour des exercices plus complexes, comme l'exercice 5 (voir annexe 3), même les plus forts s'aident d'un tableau. Pour la plus grande partie de la classe, la construction d'un tableau fut bénéfique et intéressante. Ils réussissent face à des problèmes qu'ils ne savaient pas résoudre à la séance précédente. Pour certains c'est devenu une recette miracle qui marche bien et qui leur évite de trop réfléchir.

Au vu des résultats de cette deuxième expérience, on remarque que le tableau remédie au dysfonctionnement de raisonnements des élèves. C'est un moyen simple de classement des informations qui permet de ne plus additionner deux dimensions différentes ou de multiplier deux quantités sans en connaître la signification. De plus, peu d'élèves restent inactifs devant l'énoncé comme c'était le cas dans la première séance. La plupart des élèves qui ont utilisé un tableau se sont rapidement sentis à l'aise et certains, pour le dernier

exercice (annexe 3), ne construisaient plus que les traits du tableau avec la signification des colonnes et des lignes et cela suffisait à éclaircir la situation.

Les élèves ont également compris que proposer directement la ou les inconnues est un non sens et qu'il est important d'extraire toutes les informations au préalable. Cette classification est intéressante puisqu'elle permet de résoudre à la fois les problèmes qui mènent à un système (voir exercices 1, 2, 3 et 6 de l'annexe 3) mais aussi les problèmes qui mènent à une simple équation (voir exercices 4 et 5 de l'annexe 3).

Par contre l'organisation en tableau ne résout pas les difficultés d'algébrisation. La grosse difficulté qui est apparue lors de cette deuxième expérience est le passage de la relation liant les quantités inconnues à l'équation mathématique. Ce problème ne m'est pas franchement apparu dans la première expérience, sans doute car il était noyé parmi toutes les autres erreurs. Quoi qu'il en soit, un nouveau problème se pose. Il est difficile pour certains élèves d'exprimer correctement à l'aide des symboles mathématiques et des lettres x et y une condition formulée avec des mots. A ce niveau, la mise en équation ressemble à une traduction.

En effet, comme l'écrit G.Polya² “ *pour traduire une phrase de français en anglais, deux conditions sont nécessaires. Il faut d'une part, avoir compris à fond la phrase française et d'autre part, être familiarisé avec les formes d'expressions propres à l'anglais...Il est assez facile de traduire en anglais un texte français, lorsqu'on peut le faire mot à mot ; mais il existe des gallicismes pour lesquels cela n'est pas possible* ”. La situation est la même lorsqu'il faut proposer une équation mathématique pour remplacer une condition exprimée avec des mots. Avoir compris le sens de la condition est essentiel mais il faut aussi être familiarisé aux expressions mathématiques qu'on pourrait également appeler pour certaines expressions des “ mathématismes ”. Les phrases comme “ la bouteille pèse 100 g de plus que le bouchon ”, “ la montée est de 126 m plus longue que la descente ” et surtout des expressions plus complexes comme “ son triple augmenté de 2 est égal à son double diminué de 3 ” pourraient en être des exemples. Ce problème ne s'est pas posé dans les exercices de type A1 car l'énoncé verbal se divise automatiquement en diverses parties dont chacune peut être immédiatement transcrite en équations. Par contre pour tous les autres exercices la traduction est moins évidente. Il s'avère donc, au terme de cette deuxième expérience, qu'il reste encore un travail à effectuer pour pallier ce problème.

² Polya G. : “ Comment poser et résoudre un problème ” Edition Dunod (1965)

CONCLUSION

Au terme de cette étude sur la mise en équation(s), je dirai que passer du texte d'un énoncé de problème à l'écriture d'une ou des équations qui permettra de le résoudre est une activité complexe et sous-estimée par les manuels, mais aussi par les professeurs. Le choix des inconnues n'est pas la première étape à effectuer lorsqu'on aborde un problème de mise en équation(s) comme le prône tant de manuel et comme le pensait tous les élèves au moment de ma première expérience. En effet ce choix des inconnues se fait uniquement après avoir décortiqué le texte de l'énoncé.

L'extraction des informations est une démarche complexe, elle recouvre 2 opérations essentielles et différentes :

- l'identification des objets décrits dans l'énoncé directement suivi de la dissociation des quantités inconnues et des inconnues de base. Des erreurs de représentation sur les objets du texte ont entraîné des erreurs d'identification (mauvais choix des inconnues de base, désignation incorrecte des quantités inconnues...)
- l'identification des relations que le texte de l'énoncé établit entre les objets auxquels il réfère. Une compréhension insuffisante et une lecture trop rapide du texte a entraîné une identification floue de ces relations et s'est traduit par un abandon ou par des erreurs dans l'écriture de l'équation ou des équations.

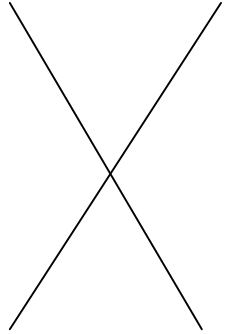
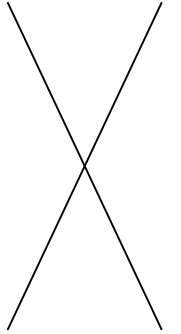






C'est pourquoi l'enseignement proposé à la deuxième séance présente plusieurs caractéristiques. Tout d'abord il est centré sur l'identification des objets liés aux différentes quantités du texte afin de remédier aux différents défauts de représentation et au mauvais choix des inconnues. Ensuite il met l'accent sur les relations nécessaires pour écrire des équations correctes. Le tout avec, comme support, un tableau qui devient une représentation intermédiaire pour convertir le texte d'un énoncé en écriture algébrique d'une ou des équations et peut constituer un véritable outil de compréhension.

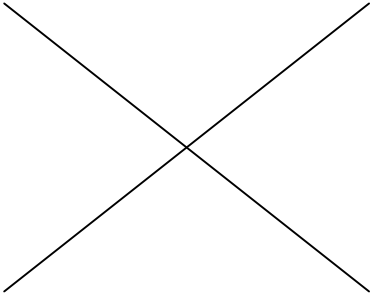
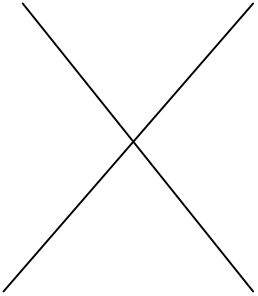
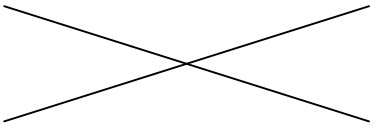
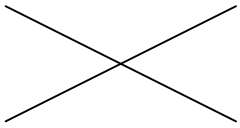
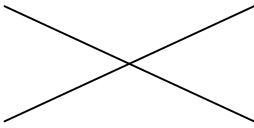
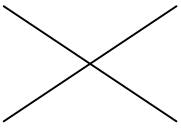
En effet, le tableau permet de rendre l'organisation des données du texte visible et claire. Il situe les informations données et les informations manquantes les unes par rapport aux autres et enfin, par une simple lecture des lignes ou colonnes comportant les inconnues, permet l'écriture d'une ou des équations.

Mais il subsiste un problème, les relations entre les quantités inconnues restent mal comprises et surtout mal traduites par certains élèves. Serait-ce du à un problème de langage pur ? un problème de français ? Un travail sur les expressions linguistiques serait nécessaire pour répondre à de telles questions.

Pour conclure je dirai simplement que ces 2 expériences ont permis des progrès visibles pour la plupart de mes élèves et prouvent qu'un enseignement non subjectif de la mise en équation(s) est possible.

ANNEXE 1

	Mise en équation(s) ou inéquation du 1 ^{er} degré			Mise en équation(s) d'un système à 2 équations de 2 inconnus		
Nom du Manuel	Existence d'une fiche méthode Particularités au niveau de l'étape 1 ou 2	Exercices résolus Particularités	Apparition des démarches 1,2 ou 3 dans les exercices proposés	Existence d'une fiche méthode Particularités au niveau de l'étape 1 ou 2	Exercices résolus Particularités	Apparition des démarches 1,2 ou 3 dans les exercices proposés
Pythagore seconde (manuel de la classe d'expérimentation)		L'inconnue et la phrase donnant la condition d'égalité sont données	Démarche 1 et 3		Les inconnues sont données et aucune aide pour la construction du système. Seule la phrase “ <i>Le texte peut se traduire par le système suivant : ”</i>	Démarche 2 et 3
Nouveau Fractale		L'inconnue et la phrase donnant la condition d'égalité sont données		Il suggère de poser les grandeurs cherchées comme inconnues, et de traduire chaque information par une équation (ou inéquation) faisant intervenir les inconnues choisies	Seules les résultats des exercices sont donnés	
Sigmath						

Dimathème (1990)			Aucune aide dans les exercices proposés	Un point méthode qui appelle les 2 premières étapes : la mathématisation (choisir les inconnues et traduire le texte à l'aide de celles-ci)	Aide au niveau des formules et questions pertinentes	Démarche 2 et 3
Nouveau Transmath		Pas d'exercices résolus mais un TP détaillé avec questions			Il donne uniquement le résultat	
Terracher	Un point méthode détaillé sur le choix de l'inconnue et une autre sur les inconnues auxiliaires qui peuvent faciliter la mise en équation	L'inconnue est donnée. La mise en équation se fait par une succession de petites questions	Démarche 3	Rappel des 4 étapes mais de grandes explications sur le sujet	Les inconnues sont données. Pour la mise en équation uniquement la phrase " <i>l'énoncé se traduit par</i> "	

ANNEXE 2 : MODULE 8

Exercice 1 (type A1)

Au bar du coin, 2 cafés et 3 bières font 53 F ; 3 cafés et 2 bières font 49,5 F. Combien coûte le café ? Combien coûte la bière ?

Exercice 2 (type A1)

Une bouteille et son bouchon pèsent 110 grammes. La bouteille pèse 100 grammes de plus que le bouchon. Quel est le poids du bouchon ?

Exercice 3 (type A2)

Un jeune lycéen, pour ce faire un peu d'argent de poche, s'occupe de la vidange de voitures et de changements de carburateur de scooters. La vidange d'une voiture lui demande 1h30 de travail et lui rapporte 125 F ; le changement d'un carburateur de scooter lui demande 45 minutes de travail et lui rapporte 75 F. Calculer le nombre de vidanges de voitures et le nombre de carburateurs changés par ce lycéen, sachant qu'il a travaillé 7h30 et qu'il a gagné 675 F.

Exercice 4 (type B1)

Déterminez un nombre de deux chiffres, sachant que la somme de ses deux chiffres est égale à 12 et que le nombre diminue de 18 quand on permute ses deux chiffres.

Exercice 5 (type B1)

Un vélomoteur monte une colline à la vitesse de 15 m/s ; puis il redescend de l'autre côté à la vitesse de 21 m/s. Le parcours a duré 270 s et la montée est de 126 m plus longue que la descente. Combien de temps a duré la montée ?

Exercice 6 (type B2)

Un marchand possède 1 kg d'oranges qui est constitué de 99 % d'eau. Au bout de quelques jours, les oranges ne contiennent plus que 98 % d'eau. Quel est alors le poids des oranges ?

ANNEXE 3 : MODULE 9

Au vu de vos brouillons sur la séance précédente, j'ai constaté que beaucoup d'entre vous ne lisent pas attentivement l'énoncé et surtout choisissent les inconnues immédiatement. C'est pourquoi aujourd'hui, avant de se lancer dans l'écriture d'équation(s), vous allez procéder à une analyse du texte de l'énoncé. Le choix des inconnues ne se fait pas à l'aveuglette et immédiatement, il faut d'abord avoir étudié et distingué les quantités inconnues, les inconnues de base, les égalités entre les différentes inconnues. Bref, face à un énoncé, vous allez essayer de faire un tri organisé de toutes les données en suivant le plan ci-dessous :

- 1) Ecrire toutes les données de l'énoncé en vrac puis classer des informations dans un tableau
- 2) Trier des informations chiffrées, c'est à dire placer les chiffres que vous pouvez dans le tableau
- 3) Prendre conscience des quantités inconnues et choisir deux inconnues de base (il faut souvent se référer à la question posée à la fin de l'exercice)
- 4) Ecrire la ou les équations en s'aidant des lignes et des colonnes du tableau

Exercice 1

Dans une usine, on fabrique du chocolat. Une première machine produit 13kg de chocolat par minute. Au bout d'un certain temps, elle est remplacée par une deuxième machine qui produit 21kg de chocolat par minute. La fabrication dure 510 minutes en tout. La première machine a produit 238 kg de plus que la deuxième.

Combien de temps a fonctionné la première machine ?

Exercice 2

Un bassin de 200 litres est alimenté par un premier robinet qui verse 40 litres par heure. On arrête ce robinet et on le remplace par une fontaine qui verse 30 litres par heure. Il a fallu 6 heures pour remplir le bassin.

Pendant combien de temps le robinet a-t-il coulé ?

Exercice 3

Un bassin est alimenté par un premier robinet qui a un débit de 45 litres par heure. On arrête ce robinet et on le remplace par une fontaine qui a un débit de 35 litres par heure. Il a fallu 5 heures pour remplir ce bassin et la fontaine a versé 15 litres de plus que le robinet. Pendant combien de temps le robinet a-t-il coulé ?

Exercice 4

Deux cyclistes démarrent aux extrémités d'une ruelle de 200 m de long et roulent tous deux à la vitesse de 10 m/s. Une mouche fait des allers-retours d'un cycliste à l'autre en effectuant des vols bien rectilignes jusqu'à ce

que les deux cyclistes se croisent. La mouche va 3 fois plus vite que les cyclistes. Quelle distance a parcouru la mouche ?

Exercice 5

Un marchand possède 1 kg d'oranges qui est constitué de 99 % d'eau. Au bout de quelques jours, les oranges ne contiennent plus que 98 % d'eau.

Quel est alors le poids des oranges ?

Exercice 6

Au début de la classe, il y a deux fois plus de garçons que de filles.

Six garçons quittent la classe et six filles arrivent, il y a alors deux fois plus de filles que de garçons.

Combien de garçons y avait-il au début ?

BIBLIOGRAPHIE

Cordier Nicole : Les problèmes de mise en équation en troisième et en seconde, Annales de didactique et sciences cognitives, volume 5, IREM de Strasbourg, n° 5, (1993)

Kourkoulos M : Modélisation mathématique de situations aboutissant à des équations du 1^{er} degré, Strasbourg, thèse ULP, (1990)

Duval R : Problèmes de mise en équations, IREM de Strasbourg, (1996)

Laur P, Lequang G, Maze M et Noirfalise A : Mise en équation et/ou apprentissage de l'algèbre, IREM de Clermont-Ferrand, (1997)

Polya G : Comment poser et résoudre un problème, Edition Dunod, (1965)

Brochure de l'APMEP : Evaluation du programme de mathématique seconde 1991